

Тренировочная работа № 2**по МАТЕМАТИКЕ****24 января 2013 года****11 класс****Вариант 1****Инструкция по выполнению работы**

На выполнение тренировочной работы по математике даётся 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1–B14) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если получен верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 4 более сложных задания (C1–C4) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

*Желаем успеха!***Район****Город (населённый пункт)****Школа****Класс****Фамилия****Имя****Отчество**

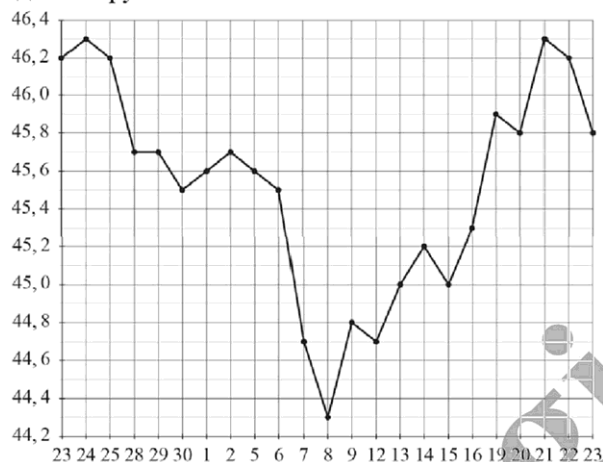
Часть 1

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- В1** Поезд Москва–Оренбург отправляется в 17 : 25, а прибывает в 19 : 25 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

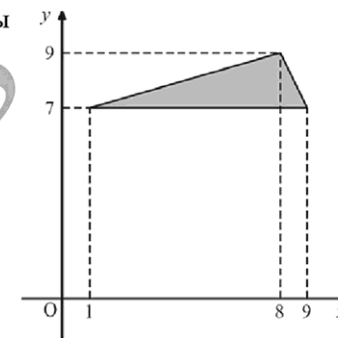
Ответ:

- В2** На рисунке жирными точками показан курс китайского юаня, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни с 23 сентября по 23 октября 2010 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена китайского юаня в рублях. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьший курс китайского юаня за указанный период. Ответ дайте в рублях.



Ответ:

- В3** Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (1;7), (9;7), (8;9).



Ответ:

- В4** Автомобильный журнал определяет рейтинги автомобилей на основе оценок безопасности S , комфорта C , функциональности F , качества Q и дизайна D . Каждый отдельный показатель оценивается читателями журнала по 5-балльной шкале. Рейтинг R вычисляется по формуле

$$R = \frac{3S + 2C + 2F + 2Q + D}{50}.$$

В таблице даны оценки каждого показателя для трёх моделей автомобилей. Определите, какой автомобиль имеет наивысший рейтинг. В ответ запишите значение этого рейтинга.

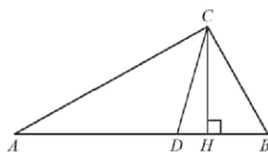
Модель автомобиля	Безопасность	Комфорт	Функциональность	Качество	Дизайн
А	3	3	2	1	5
Б	5	3	4	3	4
В	1	2	2	1	4

Ответ:

- В5** Найдите корень уравнения $\sqrt{13 + 2x} = 5$.

Ответ:

- B6** Острые углы прямоугольного треугольника равны 85° и 5° . Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

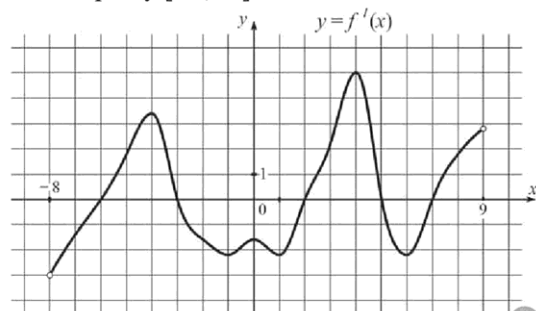


Ответ:

- B7** Найдите значение выражения $\frac{50\sin 19^\circ \cdot \cos 19^\circ}{\sin 38^\circ}$.

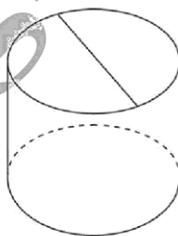
Ответ:

- B8** На рисунке изображён график производной $y = f'(x)$ функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 9)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-4; 8]$.



Ответ:

- B9** Площадь боковой поверхности цилиндра равна 40π , а диаметр основания равен 5. Найдите высоту цилиндра.

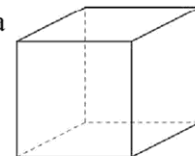


Ответ:

- B10** Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 60 выступлений — по одному от каждой страны. В первый день 36 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

Ответ:

- B11** Во сколько раз увеличится объём куба, если все его рёбра увеличить в 5 раз?



Ответ:

- B12** Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P , измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, а температура T — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{8} \cdot 10^{20} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность $P = 9,234 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$. Определите температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

Ответ:

- B13** Первый сплав содержит 5% меди, второй — 12% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 5 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 11% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ:

- B14** Найдите точку максимума функции $y = \log_3(11 + 4x - x^2) - 2$.

Ответ:

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C4 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 | а) Решите уравнение $\cos 2x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

C2 | В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC сторона основания равна 8, а угол ASB равен 36° . На ребре SC взята точка M так, что AM — биссектриса угла SAC . Найдите площадь сечения пирамиды, проходящего через точки A , M и B .

C3 | Решите систему

$$\begin{cases} \frac{2}{0,5x\sqrt{5}-1} + \frac{0,5x\sqrt{5}-2}{0,5x\sqrt{5}-3} \geq 2, \\ \left(\frac{2}{x-4} + \frac{x-4}{2}\right)^2 \leq \frac{25}{4}. \end{cases}$$

C4 | Окружность, вписанная в треугольник ABC , площадь которого равна 66, касается средней линии, параллельной стороне BC . Известно, что $BC = 11$. Найдите сторону AB .

Тренировочная работа № 2**по МАТЕМАТИКЕ****24 января 2013 года****11 класс****Вариант 2****Инструкция по выполнению работы**

На выполнение тренировочной работы по математике даётся 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1–B14) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если получен верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби

Часть 2 содержит 4 более сложных задания (C1–C4) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время

*Желаем успеха!***Район****Город (населённый пункт)****Школа****Класс****Фамилия****Имя****Отчество**

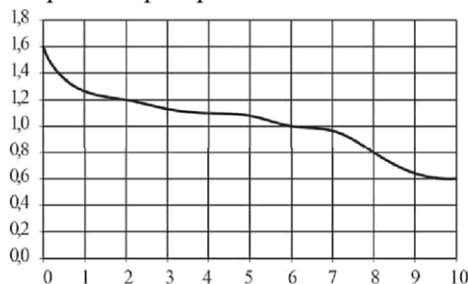
Часть 1

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- В1** В квартире, где проживает А., установлен прибор учёта расхода горячей воды (счётчик). 1 марта счётчик показывал расход 896 куб. м воды, а 1 апреля – 907 куб. м. Какую сумму должен заплатить А. за горячую воду за март, если цена за один куб. м горячей воды составляет 81 р.? Ответ дайте в рублях.

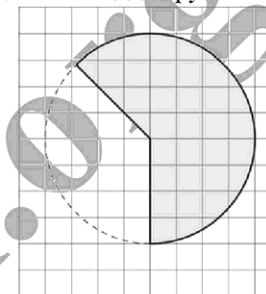
Ответ:

- В2** При работе фонарика батарейка постепенно разряжается, и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На рисунке показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечается время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по рисунку, на сколько вольт упадёт напряжение за 6 часов работы фонарика.



Ответ:

- В3** Площадь закрашенного сектора, изображённого на клетчатой бумаге (см. рис.), равна 22,5. Найдите площадь круга.



Ответ:

- В4** Для транспортировки 26 тонн груза на 150 км можно воспользоваться услугами одной из трёх фирм-перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъёмность автомобилей для каждого перевозчика указаны в таблице. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую перевозку?

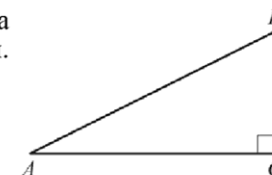
Перевозчик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 10 км)	Грузоподъёмность автомобилей (тонн)
А	20	0,4
Б	50	1
В	110	2,2

Ответ:

- В5** Решите уравнение $\frac{x-1}{5x+8} = \frac{x-1}{4x+3}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Ответ:

- В6** Один острый угол прямоугольного треугольника на 55° больше другого. Найдите больший острый угол. Ответ дайте в градусах.



Ответ:

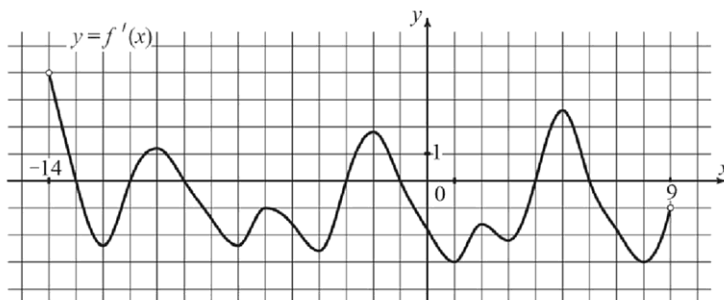
В7

Найдите значение выражения $\frac{18(\sin^2 24^\circ - \cos^2 24^\circ)}{\cos 48^\circ}$.

Ответ:

В8

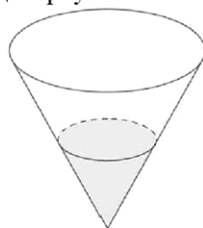
На рисунке изображён график производной $y = f'(x)$ функции $f(x)$, определённой на интервале $(-14; 9)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-10; 7]$.



Ответ:

В9

В сосуд, имеющий форму конуса, налили 30 мл жидкости до половины высоты сосуда (см. рис.) Сколько миллилитров жидкости нужно долить в сосуд, чтобы заполнить его доверху?



Ответ:

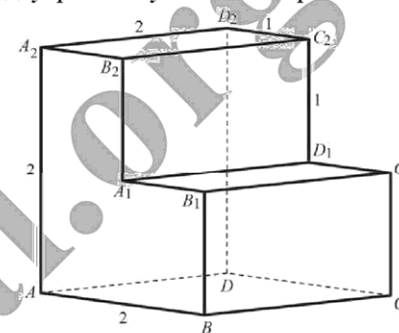
В10

На семинар приехали 6 учёных из Голландии, 5 из Италии и 4 из Чехии. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что четвёртым окажется доклад учёного из Голландии.

Ответ:

В11

Найдите расстояние между вершинами A и C_1 многогранника, изображённого на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



Ответ:

В12

Для обогрева помещения, температура в котором равна $T_{\text{п}} = 20^\circ\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду температурой $T_{\text{в}} = 48^\circ\text{C}$. Расход проходящей через трубу воды $m = 0,6$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x (м), вода охлаждается до температуры T ($^\circ\text{C}$), причём $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{в}} - T_{\text{п}}}{T - T_{\text{п}}} \text{ (м)}$, где $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 63 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1,5$ — постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы 120 м?

Ответ:

В13

Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй — 25% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 150 кг, содержащий 20% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

Ответ:

В14

Найдите наименьшее значение функции $y = 3^{x^2 - 4x + 7}$.

Ответ:

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C4 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1

а) Решите уравнение $\cos 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-2\pi; -\pi]$.

C2

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC угол ASB равен 36° . На ребре SC взята точка M так, что AM — биссектриса угла SAC . Площадь сечения пирамиды, проходящего через точки A , M и B , равна $25\sqrt{3}$. Найдите сторону основания.

C3

Решите систему неравенств:
$$\begin{cases} \frac{6}{x\sqrt{3}-3} + \frac{x\sqrt{3}-6}{x\sqrt{3}-9} \geq 2, \\ \left(\frac{10}{5x-21} + \frac{5x-21}{10}\right)^2 \leq \frac{25}{4}. \end{cases}$$

C4

Окружность, вписанная в треугольник ABC , площадь которого равна 114, касается средней линии, параллельной стороне BC . Известно, что $BC = 19$. Найдите сторону AB .

Тренировочная работа № 2**по МАТЕМАТИКЕ****24 января 2013 года****11 класс****Вариант 3****Инструкция по выполнению работы**

На выполнение тренировочной работы по математике даётся 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1–B14) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если получен верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 4 более сложных задания (C1–C4) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

*Желаем успеха!***Район****Город (населённый пункт)****Школа****Класс****Фамилия****Имя****Отчество**

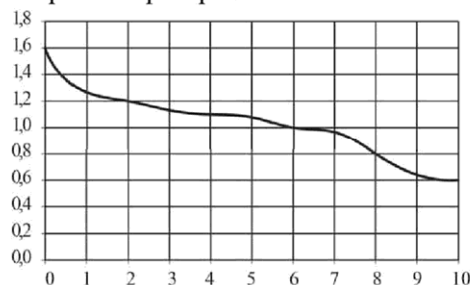
Часть 1

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- В1** Поезд Москва–Оренбург отправляется в 17 : 25, а прибывает в 19 : 25 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

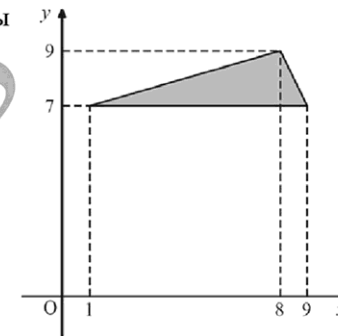
Ответ:

- В2** При работе фонарика батарейка постепенно разряжается, и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На рисунке показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечается время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по рисунку, на сколько вольт упадёт напряжение за 6 часов работы фонарика.



Ответ:

- В3** Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (1;7), (9;7), (8;9).



Ответ:

- В4** Для транспортировки 26 тонн груза на 150 км можно воспользоваться услугами одной из трёх фирм-перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъёмность автомобилей для каждого перевозчика указаны в таблице. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую перевозку?

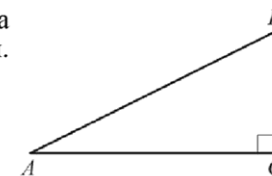
Перевозчик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 10 км)	Грузоподъёмность автомобилей (тонн)
А	20	0,4
Б	50	1
В	110	2,2

Ответ:

- В5** Найдите корень уравнения $\sqrt{13 + 2x} = 5$.

Ответ:

- В6** Один острый угол прямоугольного треугольника на 55° больше другого. Найдите больший острый угол. Ответ дайте в градусах.

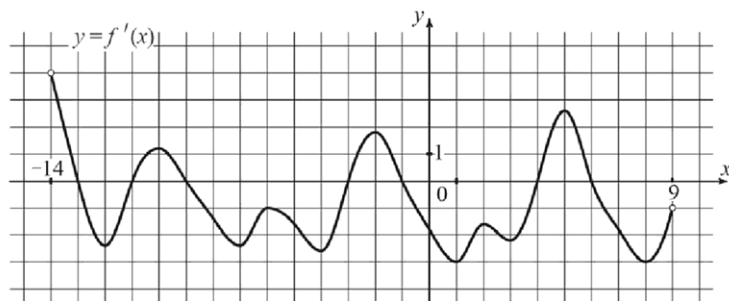


Ответ:

B7 Найдите значение выражения $\frac{50\sin 19^\circ \cdot \cos 19^\circ}{\sin 38^\circ}$.

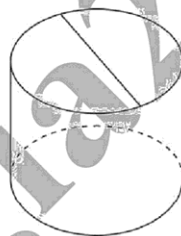
Ответ:

- B8** На рисунке изображён график производной $y=f'(x)$ функции $f(x)$, определённой на интервале $(-14; 9)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-10; 7]$.



Ответ:

- B9** Площадь боковой поверхности цилиндра равна 40π , а диаметр основания равен 5. Найдите высоту цилиндра.

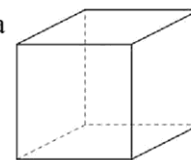


Ответ:

- B10** На семинар приехали 6 учёных из Голландии, 5 из Италии и 4 из Чехии. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что четвёртым окажется доклад учёного из Голландии.

Ответ:

- B11** Во сколько раз увеличится объём куба, если все его рёбра увеличить в 5 раз?



Ответ:

- B12** Для обогрева помещения, температура в котором равна $T_{\text{п}} = 20^\circ\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду температурой $T_{\text{в}} = 48^\circ\text{C}$. Расход проходящей через трубу воды $m = 0,6$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x (м), вода охлаждается до температуры T ($^\circ\text{C}$), причём $x = a \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{в}} - T_{\text{п}}}{T - T_{\text{п}}}$ (м), где $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 63 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $a = 1,5$ — постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы 120 м?

Ответ:

- B13** Первый сплав содержит 5% меди, второй — 12% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 5 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 11% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ:

- B14** Найдите наименьшее значение функции $y = 3^{x^2 - 4x + 7}$.

Ответ:

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C4 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $\cos 2x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$.

C2 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC угол ASB равен 36° . На ребре SC взята точка M так, что AM — биссектриса угла SAC . Площадь сечения пирамиды, проходящего через точки A , M и B равна $25\sqrt{3}$. Найдите сторону основания.

C3 Решите систему

$$\begin{cases} \frac{2}{0,5x\sqrt{5}-1} + \frac{0,5x\sqrt{5}-2}{0,5x\sqrt{5}-3} \geq 2, \\ \left(\frac{2}{x-4} + \frac{x-4}{2}\right)^2 \leq \frac{25}{4}. \end{cases}$$

C4 Окружность, вписанная в треугольник ABC , площадь которого равна 114, касается средней линии, параллельной стороне BC . Известно, что $BC = 19$. Найдите сторону AB .

Тренировочная работа № 2**по МАТЕМАТИКЕ****24 января 2013 года****11 класс****Вариант 4****Инструкция по выполнению работы**

На выполнение тренировочной работы по математике даётся 4 часа (240 мин). Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1–B14) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если получен верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 4 более сложных задания (C1–C4) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

*Желаем успеха!***Район****Город (населённый пункт)****Школа****Класс****Фамилия****Имя****Отчество**

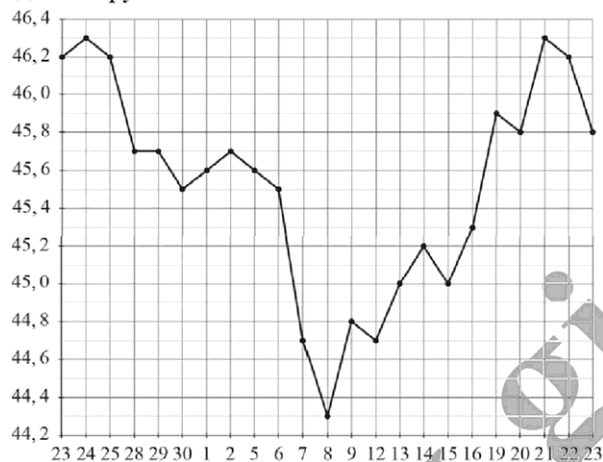
Часть 1

Ответом на задания В1–В14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- В1** В квартире, где проживает А., установлен прибор учёта расхода горячей воды (счётчик). 1 марта счётчик показывал расход 896 куб. м воды, а 1 апреля – 907 куб. м. Какую сумму должен заплатить А. за горячую воду за март, если цена за один куб. м горячей воды составляет 81 р.? Ответ дайте в рублях.

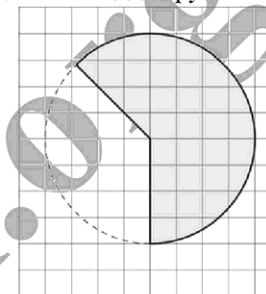
Ответ:

- В2** На рисунке жирными точками показан курс китайского юаня, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни с 23 сентября по 23 октября 2010 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена китайского юаня в рублях. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьший курс китайского юаня за указанный период. Ответ дайте в рублях.



Ответ:

- В3** Площадь закрашенного сектора, изображённого на клетчатой бумаге (см. рис.), равна 22,5. Найдите площадь круга.



Ответ:

- В4** Автомобильный журнал определяет рейтинги автомобилей на основе оценок безопасности S , комфорта C , функциональности F , качества Q и дизайна D . Каждый отдельный показатель оценивается читателями журнала по 5-балльной шкале. Рейтинг R вычисляется по формуле

$$R = \frac{3S + 2C + 2F + 2Q + D}{50}.$$

В таблице даны оценки каждого показателя для трёх моделей автомобилей. Определите, какой автомобиль имеет наивысший рейтинг. В ответ запишите значение этого рейтинга.

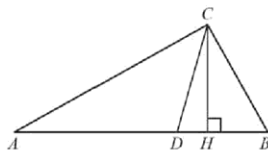
Модель автомобиля	Безопасность	Комфорт	Функциональность	Качество	Дизайн
А	3	3	2	1	5
Б	5	3	4	3	4
В	1	2	2	1	4

Ответ:

- В5** Решите уравнение $\frac{x-1}{5x+8} = \frac{x-1}{4x+3}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Ответ:

- B6** Острые углы прямоугольного треугольника равны 85° и 5° . Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

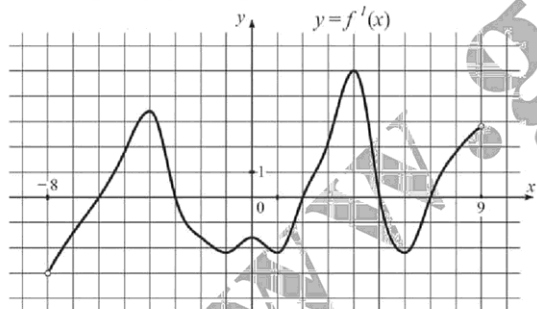


Ответ:

- B7** Найдите значение выражения $\frac{18(\sin^2 24^\circ - \cos^2 24^\circ)}{\cos 48^\circ}$.

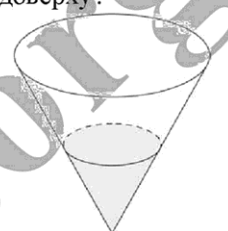
Ответ:

- B8** На рисунке изображён график производной $y = f'(x)$ функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 9)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-4; 8]$.



Ответ:

- B9** В сосуд, имеющий форму конуса, налили 30 мл жидкости до половины высоты сосуда (см. рис.) Сколько миллилитров жидкости нужно долить в сосуд, чтобы заполнить его доверху?

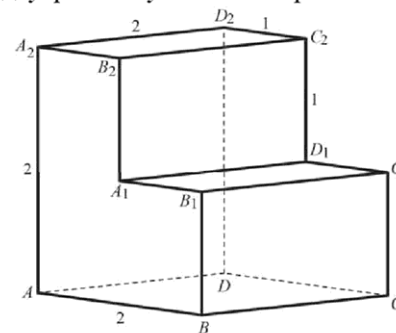


Ответ:

- B10** Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 60 выступлений — по одному от каждой страны. В первый день 36 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

Ответ:

- B11** Найдите расстояние между вершинами A и C_1 многогранника, изображённого на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



Ответ:

- В12** Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P , измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, а температура T — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{8} \cdot 10^{20} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность $P = 9,234 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$. Определите температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

Ответ:

- В13** Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй — 25% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 150 кг, содержащий 20% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

Ответ:

- В14** Найдите точку максимума функции $y = \log_3(11 + 4x - x^2) - 2$.

Ответ:

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C4 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

- C1** а) Решите уравнение $\cos 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-2\pi; -\pi]$.

- C2** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC сторона основания равна 8, а угол ASB равен 36° . На ребре SC взята точка M так, что AM — биссектриса угла SAC . Найдите площадь сечения пирамиды, проходящего через точки A , M и B .

- C3** Решите систему неравенств:
$$\begin{cases} \frac{6}{x\sqrt{3}-3} + \frac{x\sqrt{3}-6}{x\sqrt{3}-9} \geq 2, \\ \left(\frac{10}{5x-21} + \frac{5x-21}{10}\right)^2 \leq \frac{25}{4}. \end{cases}$$

- C4** Окружность, вписанная в треугольник ABC , площадь которого равна 66, касается средней линии, параллельной стороне BC . Известно, что $BC = 11$. Найдите сторону AB .

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1

а) Решите уравнение $\cos 2x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$.

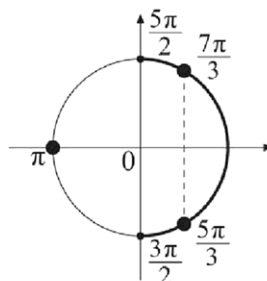
Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$2\cos^2 x - 1 = -\cos x; \quad 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$$

Значит, либо $\cos x = -1$, откуда $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, либо $\cos x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём с помощью единичной окружности корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$: $x = \frac{5\pi}{3}$; $x = \frac{7\pi}{3}$.



Ответ: а) $-\pi + 2\pi k$, $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью оценок, графика, решения двойных неравенств и т.п.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в п. а) и в п. б)	2
Обоснованно получен верный ответ в п. а), но обоснование отбора корней в п. б) не приведено, или задача в п. а) обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. б) приведён обоснованный отбор корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC сторона основания равна 8, а угол ASB равен 36° . На ребре SC взята точка M так, что AM — биссектриса угла SAC . Найдите площадь сечения пирамиды, проходящего через точки A , M и B .

Решение.

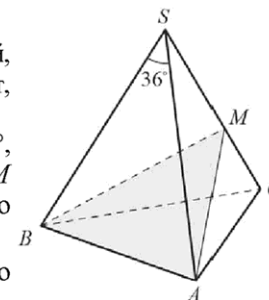
Нужное сечение — треугольник AMB .

Рассмотрим треугольник ASC . Он равнобедренный, $\angle ASC = \angle ASB = 36^\circ$, поэтому $\angle SAC = \angle SCA = 72^\circ$. Значит, $\angle MAC = 36^\circ$.

Рассмотрим теперь треугольник CAM . Сумма его углов 180° , значит, $\angle AMC = 72^\circ$. Следовательно, треугольник CAM равнобедренный, и поэтому $AM = AC = 8$. Аналогично находим, что $BM = 8$.

Таким образом, треугольник AMB равносторонний со стороной 8. Его площадь равна $\frac{8^2 \sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$.

Ответ: $16\sqrt{3}$.



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Показано, что сечением является равносторонний треугольник или что стороны сечения равны сторонам основания	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3

Решите систему неравенств:
$$\begin{cases} \frac{2}{0,5x\sqrt{5}-1} + \frac{0,5x\sqrt{5}-2}{0,5x\sqrt{5}-3} \geq 2, \\ \left(\frac{2}{x-4} + \frac{x-4}{2}\right)^2 \leq \frac{25}{4}. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство. Сделав замену $z = 0,5x\sqrt{5}$, получаем:

$$\frac{2}{z-1} + \frac{z-2}{z-3} \geq 2; \quad \frac{(z-2)(z-5)}{(z-1)(z-3)} \leq 0; \quad 1 < z \leq 2 \quad \text{или} \quad 3 < z \leq 5.$$

Обратная замена даёт $\frac{2}{\sqrt{5}} < x \leq \frac{4}{\sqrt{5}}$ или $\frac{6}{\sqrt{5}} < x \leq 2\sqrt{5}$.

Решим второе неравенство. Сделав замену $t = \frac{x-4}{2}$, получаем:

$$\left(\frac{1}{t} + t\right)^2 \leq \frac{25}{4}; \quad 0,5 \leq |t| \leq 2.$$

Обратная замена даёт: $0 \leq x \leq 3$ или $5 \leq x \leq 8$.

Учитывая, что $0 < \frac{2}{\sqrt{5}} < \frac{4}{\sqrt{5}} < \frac{6}{\sqrt{5}} < 3 < 2\sqrt{5} < 5$, получаем решение системы:

$$\frac{2}{\sqrt{5}} < x \leq \frac{4}{\sqrt{5}} \quad \text{или} \quad \frac{6}{\sqrt{5}} < x \leq 3.$$

Ответ: $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right]$, $\left(\frac{6}{\sqrt{5}}; 3\right]$.

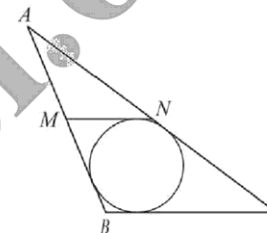
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С4

Окружность, вписанная в треугольник ABC , площадь которого равна 66, касается средней линии, параллельной стороне BC . Известно, что $BC = 11$. Найдите сторону AB .

Решение.

Обозначим $AB = x$, $AC = y$, пусть p — полупериметр треугольника ABC . Пусть M и N — середины сторон AB и AC соответственно. Тогда $MN = \frac{1}{2}BC = \frac{11}{2}$.



В трапецию $BMNC$ вписана окружность, поэтому

$$BM + CN = BC + MN = 11 + \frac{11}{2} = \frac{33}{2},$$

значит,

$$x + y = AB + AC = 2BM + 2CN = 2(BM + CN) = 2\left(BC + MN\right) = 2 \cdot \frac{33}{2} = 33,$$

$$p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{x + y + 11}{2} = \frac{33 + 11}{2} = 22.$$

По формуле Герона

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = \\ &= \sqrt{22(22-x)(22-y)(22-11)} = 11\sqrt{2(22-x)(22-y)} = 66; \\ \sqrt{2(22-x)(22-y)} &= 6; \quad (22-x)(22-y) = 18; \\ (22-x)(22-33+x) &= 18; \quad x^2 - 33x + 260 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим, что $x = 13$ или $x = 20$.

Ответ: 13 или 20.

Содержание критерия	Баллы
Верно рассмотрена геометрическая конфигурация, и обоснованно получен правильный ответ	3
Верно рассмотрена геометрическая конфигурация, и обоснованно получено одно правильное значение искомой величины	2
Верно рассмотрена геометрическая конфигурация, и обоснованно получены одно или оба значения искомой величины, неправильные из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1

а) Решите уравнение $\cos 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-2\pi; -\pi]$.

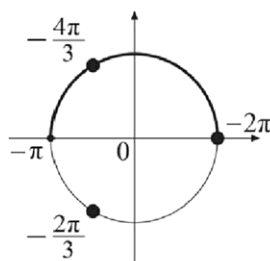
Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$2\cos^2 x - 1 = \cos x; \quad 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$$

Значит, либо $\cos x = 1$, откуда $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, либо $\cos x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём с помощью единичной окружности корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-2\pi; -\pi]$: $-2\pi; -\frac{4\pi}{3}$.



Ответ: а) $2\pi k, \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-2\pi, -\frac{4\pi}{3}$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью оценок, графика, решения двойных неравенств и т.п.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в п. а) и в п. б)	2
Обоснованно получен верный ответ в п. а), но обоснование отбора корней в п. б) не приведено, или задача в п. а) обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. б) приведён обоснованный отбор корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC угол ASB равен 36° . На ребре SC взята точка M так, что AM — биссектриса угла SAC . Площадь сечения пирамиды, проходящего через точки A, M и B , равна $25\sqrt{3}$. Найдите сторону основания.

Решение.

Нужное сечение — треугольник AMB .

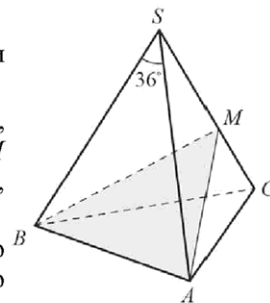
Рассмотрим треугольник ASC . Он равнобедренный, и $\angle SAC = \angle SCA = 72^\circ$. Значит, $\angle MAC = 36^\circ$.

Рассмотрим теперь треугольник SAC . Сумма его углов 180° , значит, $\angle AMC = 72^\circ$. Следовательно, треугольник SAC равнобедренный, и поэтому $AC = AM$. Аналогично находим, что $BM = BC$.

Таким образом, треугольник AMB равносторонний, и его сторона AB одновременно является стороной основания. По

условию составим уравнение $\frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$, откуда $AB = 10$.

Ответ: 10.



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Показано, что сечением является равносторонний треугольник или что стороны сечения равны сторонам основания	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3

Решите систему неравенств:
$$\begin{cases} \frac{6}{x\sqrt{3}-3} + \frac{x\sqrt{3}-6}{x\sqrt{3}-9} \geq 2, \\ \left(\frac{10}{5x-21} + \frac{5x-21}{10} \right)^2 \leq \frac{25}{4}. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство. Сделав замену $z = x\sqrt{3}$, получаем:

$$\frac{6}{z-3} + \frac{z-6}{z-9} \geq 2; \quad \frac{(z-6)(z-15)}{(z-9)(z-3)} \leq 0; \quad 3 < z \leq 6 \quad \text{или} \quad 9 < z \leq 15.$$

Обратная замена даёт: $\sqrt{3} < x \leq 2\sqrt{3}$ или $3\sqrt{3} < x \leq 5\sqrt{3}$.

Решим второе неравенство. Сделав замену $t = \frac{5x-21}{10}$, получаем:

$$\left(\frac{1}{t} + t \right)^2 \leq \frac{25}{4}; \quad 0,5 \leq |t| \leq 2.$$

Обратная замена даёт: $0,2 \leq x \leq 3,2$ или $5,2 \leq x \leq 8,2$.

Учитывая, что $0,2 < \sqrt{3} < 3,2 < 2\sqrt{3} < 3\sqrt{3} < 5,2 < 8,2 < 5\sqrt{3}$, получаем решение системы:

$$\sqrt{3} < x \leq 3,2 \quad \text{или} \quad 5,2 \leq x \leq 8,2.$$

Ответ: $(\sqrt{3}; 3,2]$, $[5,2; 8,2]$.

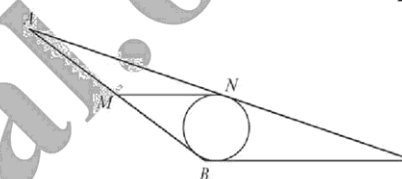
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С4

Окружность, вписанная в треугольник ABC , площадь которого равна 114, касается средней линии, параллельной стороне BC . Известно, что $BC = 19$. Найдите сторону AB .

Решение.

Обозначим $AB = x$, $AC = y$, пусть p — полупериметр треугольника ABC . Пусть M и N — середины сторон AB и AC соответственно. Тогда $MN = \frac{1}{2}BC = \frac{19}{2}$.



В трапецию $BMNC$ вписана окружность, поэтому

$$BM + CN = BC + MN = 19 + \frac{19}{2} = \frac{57}{2};$$

значит,

$$x + y = AB + AC = 2BM + 2CN = 2(BM + CN) = 2(BC + MN) = 2 \cdot \frac{57}{2} = 57,$$

$$p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{x + y + 19}{2} = \frac{57 + 19}{2} = 38.$$

По формуле Герона

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = \sqrt{38(38-x)(38-y)(38-19)} = 19\sqrt{2(38-x)(38-y)} = 114;$$

$$\sqrt{2(38-x)(38-y)} = 6; \quad (38-x)(38-y) = 18;$$

$$(38-x)(38-57+x) = 18; \quad x^2 - 57x + 740 = 0.$$

Отсюда находим, что $x = 20$ или $x = 37$.

Ответ: 20 или 37.

Содержание критерия	Баллы
Верно рассмотрена геометрическая конфигурация, и обоснованно получен правильный ответ	3
Верно рассмотрена геометрическая конфигурация, и обоснованно получено одно правильное значение искомой величины	2
Верно рассмотрена геометрическая конфигурация, и обоснованно получены одно или оба значения искомой величины, неправильные из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Ответы к заданиям с кратким ответом

№ задания	Ответ
B1	26
B2	44,3
B3	8
B4	0,78
B5	6
B6	40
B7	25

№ задания	Ответ
B8	2
B9	8
B10	0,2
B11	125
B12	6000
B13	7
B14	2

Ответы к заданиям с кратким ответом

№ задания	Ответ
B1	891
B2	0,6
B3	36
B4	19500
B5	1
B6	72,5
B7	-18

№ задания	Ответ
B8	3
B9	210
B10	0,4
B11	3
B12	27
B13	50
B14	27

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1

а) Решите уравнение $\cos 2x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

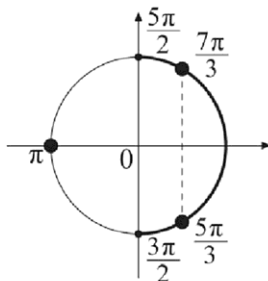
Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$2\cos^2 x - 1 = -\cos x; \quad 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$$

Значит, либо $\cos x = -1$, откуда $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, либо $\cos x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём с помощью единичной окружности корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$: $x = \frac{5\pi}{3}$; $x = \frac{7\pi}{3}$.



Ответ: а) $-\pi + 2\pi k$, $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью оценок, графика, решения двойных неравенств и т.п.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в п. а) и в п. б)	2
Обоснованно получен верный ответ в п. а), но обоснование отбора корней в п. б) не приведено, или задача в п. а) обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. б) приведён обоснованный отбор корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC угол ASB равен 36° . На ребре SC взята точка M так, что AM — биссектриса угла SAC . Площадь сечения пирамиды, проходящего через точки A , M и B , равна $25\sqrt{3}$. Найдите сторону основания.

Решение.

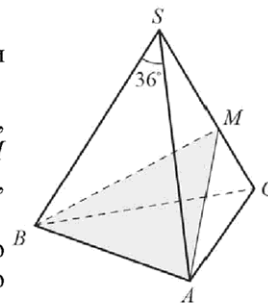
Нужное сечение — треугольник AMB .

Рассмотрим треугольник ASC . Он равнобедренный, и $\angle SAC = \angle SCA = 72^\circ$. Значит, $\angle MAC = 36^\circ$.

Рассмотрим теперь треугольник SAM . Сумма его углов 180° , значит, $\angle AMC = 72^\circ$. Следовательно, треугольник SAM равнобедренный, и поэтому $AC = AM$. Аналогично находим, что $BM = BC$.

Таким образом, треугольник AMB равносторонний, и его сторона AB одновременно является стороной основания. По условию составим уравнение $\frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$, откуда $AB = 10$.

Ответ: 10.



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Показано, что сечением является равносторонний треугольник или что стороны сечения равны сторонам основания	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3

Решите систему неравенств:
$$\begin{cases} \frac{2}{0,5x\sqrt{5}-1} + \frac{0,5x\sqrt{5}-2}{0,5x\sqrt{5}-3} \geq 2, \\ \left(\frac{2}{x-4} + \frac{x-4}{2}\right)^2 \leq \frac{25}{4}. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство. Сделав замену $z = 0,5x\sqrt{5}$, получаем:

$$\frac{2}{z-1} + \frac{z-2}{z-3} \geq 2; \quad \frac{(z-2)(z-5)}{(z-1)(z-3)} \leq 0; \quad 1 < z \leq 2 \quad \text{или} \quad 3 < z \leq 5.$$

Обратная замена даёт $\frac{2}{\sqrt{5}} < x \leq \frac{4}{\sqrt{5}}$ или $\frac{6}{\sqrt{5}} < x \leq 2\sqrt{5}$.

Решим второе неравенство. Сделав замену $t = \frac{x-4}{2}$, получаем:

$$\left(\frac{1}{t} + t\right)^2 \leq \frac{25}{4}; \quad 0,5 \leq |t| \leq 2.$$

Обратная замена даёт: $0 \leq x \leq 3$ или $5 \leq x \leq 8$.

Учитывая, что $0 < \frac{2}{\sqrt{5}} < \frac{4}{\sqrt{5}} < \frac{6}{\sqrt{5}} < 3 < 2\sqrt{5} < 5$, получаем решение системы:

$$\frac{2}{\sqrt{5}} < x \leq \frac{4}{\sqrt{5}} \quad \text{или} \quad \frac{6}{\sqrt{5}} < x \leq 3.$$

Ответ: $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right]$, $\left(\frac{6}{\sqrt{5}}; 3\right]$.

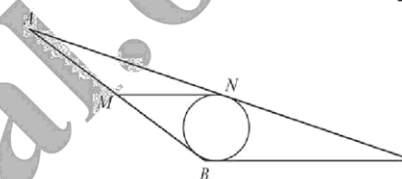
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С4

Окружность, вписанная в треугольник ABC , площадь которого равна 114, касается средней линии, параллельной стороне BC . Известно, что $BC = 19$. Найдите сторону AB .

Решение.

Обозначим $AB = x$, $AC = y$, пусть p — полупериметр треугольника ABC . Пусть M и N — середины сторон AB и AC соответственно. Тогда $MN = \frac{1}{2}BC = \frac{19}{2}$.



В трапецию $BMNC$ вписана окружность, поэтому

$$BM + CN = BC + MN = 19 + \frac{19}{2} = \frac{57}{2};$$

значит,

$$x + y = AB + AC = 2BM + 2CN = 2(BM + CN) = 2\left(BC + MN\right) = 2 \cdot \frac{57}{2} = 57,$$

$$p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{x + y + 19}{2} = \frac{57 + 19}{2} = 38.$$

По формуле Герона

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = \sqrt{38(38-x)(38-y)(38-19)} = 19\sqrt{2(38-x)(38-y)} = 114;$$

$$\sqrt{2(38-x)(38-y)} = 6; \quad (38-x)(38-y) = 18;$$

$$(38-x)(38-57+x) = 18; \quad x^2 - 57x + 740 = 0.$$

Отсюда находим, что $x = 20$ или $x = 37$.

Ответ: 20 или 37.

Содержание критерия	Баллы
Верно рассмотрена геометрическая конфигурация, и обоснованно получен правильный ответ	3
Верно рассмотрена геометрическая конфигурация, и обоснованно получено одно правильное значение искомой величины	2
Верно рассмотрена геометрическая конфигурация, и обоснованно получены одно или оба значения искомой величины, неправильные из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1

а) Решите уравнение $\cos 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-2\pi; -\pi]$.

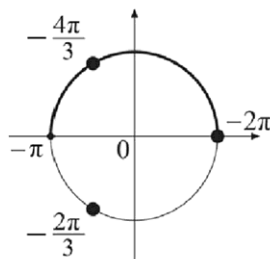
Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$2\cos^2 x - 1 = \cos x; \quad 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$$

Значит, либо $\cos x = 1$, откуда $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, либо $\cos x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём с помощью единичной окружности корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-2\pi; -\pi]$: $-2\pi; -\frac{4\pi}{3}$.



Ответ: а) $2\pi k, \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-2\pi, -\frac{4\pi}{3}$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью оценок, графика, решения двойных неравенств и т.п.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в п. а) и в п. б)	2
Обоснованно получен верный ответ в п. а), но обоснование отбора корней в п. б) не приведено, или задача в п. а) обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. б) приведён обоснованный отбор корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC сторона основания равна 8, а угол ASB равен 36° . На ребре SC взята точка M так, что AM — биссектриса угла SAC . Найдите площадь сечения пирамиды, проходящего через точки A, M и B .

Решение.

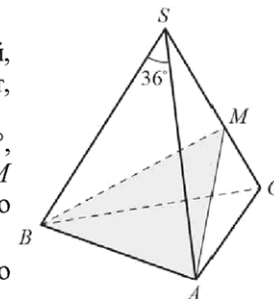
Нужное сечение — треугольник AMB .

Рассмотрим треугольник ASC . Он равнобедренный, $\angle ASC = \angle ASB = 36^\circ$, поэтому $\angle SAC = \angle SCA = 72^\circ$. Значит, $\angle MAC = 36^\circ$.

Рассмотрим теперь треугольник CAM . Сумма его углов 180° , значит, $\angle AMC = 72^\circ$. Следовательно, треугольник CAM равнобедренный, и поэтому $AM = AC = 8$. Аналогично находим, что $BM = 8$.

Таким образом, треугольник AMB равносторонний со стороной 8. Его площадь равна $\frac{8^2 \sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$.

Ответ: $16\sqrt{3}$.



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Показано, что сечением является равносторонний треугольник или что стороны сечения равны сторонам основания	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3

Решите систему неравенств:
$$\begin{cases} \frac{6}{x\sqrt{3}-3} + \frac{x\sqrt{3}-6}{x\sqrt{3}-9} \geq 2, \\ \left(\frac{10}{5x-21} + \frac{5x-21}{10} \right)^2 \leq \frac{25}{4}. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство. Сделав замену $z = x\sqrt{3}$, получаем:

$$\frac{6}{z-3} + \frac{z-6}{z-9} \geq 2; \quad \frac{(z-6)(z-15)}{(z-9)(z-3)} \leq 0; \quad 3 < z \leq 6 \quad \text{или} \quad 9 < z \leq 15.$$

Обратная замена даёт: $\sqrt{3} < x \leq 2\sqrt{3}$ или $3\sqrt{3} < x \leq 5\sqrt{3}$.

Решим второе неравенство. Сделав замену $t = \frac{5x-21}{10}$, получаем:

$$\left(\frac{1}{t} + t \right)^2 \leq \frac{25}{4}; \quad 0,5 \leq |t| \leq 2.$$

Обратная замена даёт: $0,2 \leq x \leq 3,2$ или $5,2 \leq x \leq 8,2$.

Учитывая, что $0,2 < \sqrt{3} < 3,2 < 2\sqrt{3} < 3\sqrt{3} < 5,2 < 8,2 < 5\sqrt{3}$, получаем решение системы:

$$\sqrt{3} < x \leq 3,2 \quad \text{или} \quad 5,2 \leq x \leq 8,2.$$

Ответ: $(\sqrt{3}; 3,2]$, $[5,2; 8,2]$.

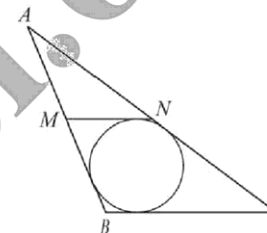
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С4

Окружность, вписанная в треугольник ABC , площадь которого равна 66, касается средней линии, параллельной стороне BC . Известно, что $BC = 11$. Найдите сторону AB .

Решение.

Обозначим $AB = x$, $AC = y$, пусть p — полупериметр треугольника ABC . Пусть M и N — середины сторон AB и AC соответственно. Тогда $MN = \frac{1}{2}BC = \frac{11}{2}$.



В трапецию $BMNC$ вписана окружность, поэтому

$$BM + CN = BC + MN = 11 + \frac{11}{2} = \frac{33}{2},$$

значит,

$$x + y = AB + AC = 2BM + 2CN = 2(BM + CN) = 2\left(BC + MN\right) = 2 \cdot \frac{33}{2} = 33,$$

$$p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{x + y + 11}{2} = \frac{33 + 11}{2} = 22.$$

По формуле Герона

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = \\ &= \sqrt{22(22-x)(22-y)(22-11)} = 11\sqrt{2(22-x)(22-y)} = 66; \\ \sqrt{2(22-x)(22-y)} &= 6; \quad (22-x)(22-y) = 18; \\ (22-x)(22-33+x) &= 18; \quad x^2 - 33x + 260 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим, что $x = 13$ или $x = 20$.

Ответ: 13 или 20.

Содержание критерия	Баллы
Верно рассмотрена геометрическая конфигурация, и обоснованно получен правильный ответ	3
Верно рассмотрена геометрическая конфигурация, и обоснованно получено одно правильное значение искомой величины	2
Верно рассмотрена геометрическая конфигурация, и обоснованно получены одно или оба значения искомой величины, неправильные из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Ответы к заданиям с кратким ответом

№ задания	Ответ
B1	26
B2	0,6
B3	8
B4	19500
B5	6
B6	72,5
B7	25

№ задания	Ответ
B8	3
B9	8
B10	0,4
B11	125
B12	27
B13	7
B14	27

Ответы к заданиям с кратким ответом

№ задания	Ответ
B1	891
B2	44,30,6
B3	36
B4	0,78
B5	1
B6	40
B7	-18

№ задания	Ответ
B8	2
B9	210
B10	0,2
B11	3
B12	6000
B13	50
B14	2